Quelques aspects relatifs aux rayons X

CNC-2018-mp-physique II

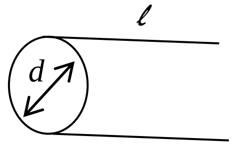
Corrigé proposé par **M.AAZIZI**. CPGE Béni Mellal : aazizi.3000@gmail.com

23 - Mai – **2018**

I- Généralité sur les rayons X :

I-1.1- L'expression de la résistance du filament est :

$$R = \rho.\frac{l}{S} = \boxed{\rho.\frac{4.l}{\pi.d^2}}$$



I-1.2- La puissance dissipée dans le filament par effet JOULE est : $\boxed{P_J = R.I_C^2}$

I-1.3- Loi de Stefan (ou de Stefan-Boltzmann) :

la puissance surfacique totale rayonnée par un corps noir portée à la température T est :

$$\boxed{P_S = \sigma.T^4}$$

Elle est aussi égale à la puissance totale absorbée par le corps noir en équilibre.

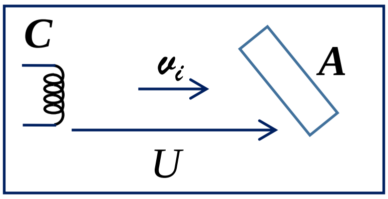
I-1.4- En négligeant tous phénomènes autres que l'effet Joule et le rayonnement thermique du filament, à l'équilibre de ce dernier on peut écrire que :

$$P_J = P_S.S_L = P_S.\pi.d.l \Rightarrow \pi.d.l.\sigma.T^4 = \rho.\frac{4.l}{\pi.d^2}.I_C^2 \Rightarrow \boxed{I_C = T^2.\frac{\pi}{2}.\sqrt{\frac{\sigma.d^3}{\rho}}}$$

A.N. $\boxed{I_C = 8{,}25A}$

Courant du même ordre de grandeur des courants électrocinétiques habituels.

I-1.5- Le théorème de l'énergie cinétique s'écrivant : $\Delta E_c = W_e$



$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(v^2 - 0^2) = -e.(U_C - U_A) \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2.e.U}{m}}}$$

A.N. $\boxed{v = 1{,}19.10^8 m.s^{-1}}$ appartient au domaine relativiste !

on doit utiliser l'expression relativiste de l'énergie cinétique.

$$(\gamma - 1).m.C^2 = e.U = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/C^2}} - 1\right).m.C^2 \Rightarrow \boxed{v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + \frac{e.U}{m.C^2})^2}}}$$

A.N. $\boxed{v = 1{,}13.10^8 m.s^{-1}}$

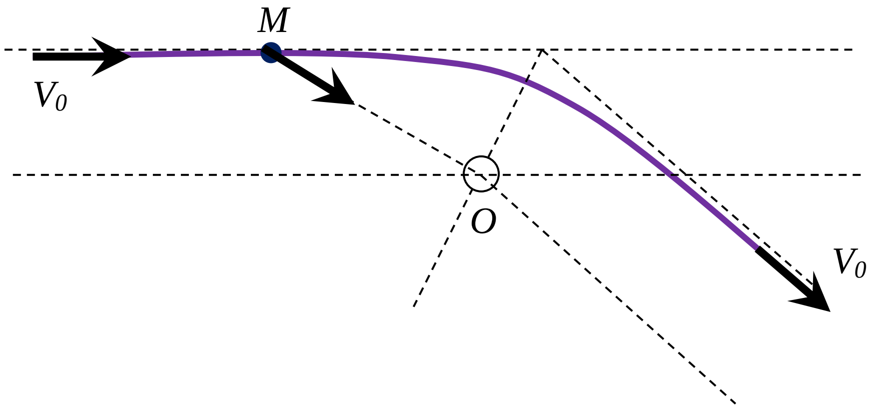
la correction relativiste valant **5**%, est peu signifiante.

I-1.6- En considérant que **toute l'énergie cinétique** d'arrivée à l'anode est transformée en énergie radiative on a :

$$U.e = \Delta E_C = h.\nu_{\max} = \boxed{\frac{h.C}{\lambda_{\min}}} \quad \Rightarrow \textbf{AN} \quad \boxed{\lambda_{\min} = \frac{h.C}{e.U} = \mathbf{31{,}12\ pm}}$$

I-1.7-

I-1.7.1- La force étant centrale attractive, le mouvement de l'électron est donc plan **hyperbolique " interne "** (de foyer O).



Oui le mouvement **est varié** de point de vue module et direction de la vitesse.

I-1.7.2- L'électron atteint l'anti-cathode avec une accélération nulle (mouvement quasi uniforme), mais dès qu'il pénètre dans le champ électrique du noyau, son accélération devient de plus en plus grande (puis re-diminue), l'énergie de l'électron varie donc de manière continue d'où émission d'un rayonnement d'accélération continu, d'intensité spectrale continue en fonction de la longueur d'onde λ.

I-2.1- La puissance électrique absorbée par le circuit de haute tension est : $\boxed{p = U.i = 400W}$

I-2.2- La puissance rayonnée est : $\boxed{P_r = 1\%.p = 4W}$

I-2.3- Le système s'échauffant à cause de l'énergie résiduelle (non rayonnée) égale à $p - P_r = P_{nr} = 396W$, d'où nécessité d'un refroidissement systématique du dispositif.

I-2.4- En appliquant le premier principe pour un système ouvert (en écoulement permanent) et en supposant que l'excédent énergétique est totalement absorbé par l'eau, on a :

$$D_e.\Delta(h + e_C + e_P) = P_{th} + P_u \quad \Rightarrow \quad D_e.c_e\Delta\theta = P_{th} = p - P_r$$

$$\Rightarrow \boxed{D_e = \frac{p - P_r}{c_e.(\theta_2 - \theta_1)}} \quad \textbf{AN} \quad \boxed{D_e = 2{,}71.10^{-3} kg.s^{-1}}$$

II-Transitions électroniques et spectres de raies atomiques

II-1.1-

II-1.1.1- La force exercée par le noyau sur l'électron $\boxed{\vec{F} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0.r^2}\vec{u}_r = \frac{-k}{r^2}\vec{u}_r}$

L'application du théorème du moment cinétique TMC à l'électron en O, dans le référentiel R(OXYZ) de l'atome d'hydrogène supposé galiléen, s'écrivant :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OM}\Lambda\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{Cte}}$$ (caractérisant un mouvement plan)

II-1.1.2- La LFD appliqué à l'électron donne $m.\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{-k}{m}.\frac{1}{r^2}.\vec{u}_r}$

D'où : $m.(\frac{dv}{dt}\vec{u}_\theta - \frac{v^2}{r}\vec{u}_r) = \frac{-k}{r^2}\vec{u}_r$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$ et $\boxed{v = \sqrt{\frac{k}{m.r}}}$ D'où : $\vec{L}_O = m\vec{r}\Lambda\vec{v} = \boxed{\sqrt{m.k.r}\ \vec{u}_z}$

II-1.1.3- Le travail élémentaire " reçu " par l'électron au cours d'un déplacement $d\overrightarrow{OM}$ est $\delta W = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = \frac{-k}{r^2}\vec{u}_r.d(r\vec{u}_r) = \frac{-k}{r^2}\vec{u}_r.[(dr)\vec{u}_r + r.(d\vec{u}_r)] = \frac{-k.dr}{r^2} = d(\frac{k}{r})$

d'où : $\delta W = -d(\frac{-k}{r})$, $\vec{F}$ est donc conservative et dérive de l'énergie potentielle :

$E_p(r) = \frac{-k}{r} + cte$ et comme $E_p(\infty) = 0$ d'où : $\boxed{E_p(r) = \frac{-k}{r}}$

II-1.1.4- L'énergie mécanique de l'électron, dans R(OXYZ) est :

$$E(r) = E_C + E_p(r) = \frac{1}{2}m.v^2 - \frac{k}{r} = \boxed{-\frac{k}{2.r}}$$

II-1.2-

II-1.2.1- Expression du moment dipolaire électrique de l'atome d'hydrogène :

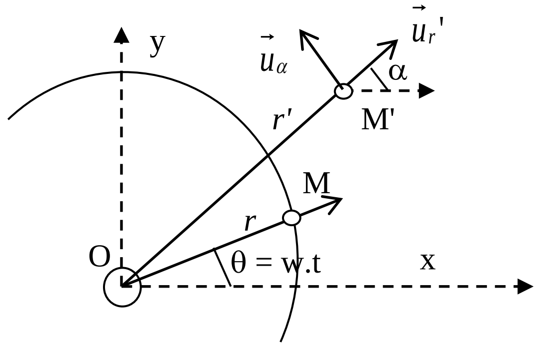
$$\vec{p} = (-q)\overrightarrow{NP} = e.\overrightarrow{MO} = -e\overrightarrow{OM} = \boxed{-e.r.\vec{u}_r}$$

II-1.2.2- $\vec{p} = -e.r\vec{u}_r = -e.r.[\cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y] = -e.r.[\cos(\frac{v.t}{r})\vec{u}_x + \sin(\frac{v.t}{r})\vec{u}_y]$

$= p_1(t)\vec{u}_x + p_2(t)\vec{u}_y$ où $p_1(t) = p_0.\cos(wt)$ et $\boxed{p_2(t) = p_0.\sin(wt)}$

Avec : $\boxed{p_0 = -e.r}$ et $w = \frac{v}{r}$

II-1.2.3- Le terme t' = t- r'/c est l'instant auquel le signal EM (l'onde électromagnétique) émane au niveau de l'atome (en O), qui attiendra le point M ' à l'instant t.



II-1.2.4- Au loin de l'atome (**zone dipolaire**), l'onde est localement plane, aussi le champ magnétique vérifie : $c.\vec{B}_1 = \vec{u}_r' \Lambda \vec{E}_1$

d'où : $\vec{\pi}_1 = \dfrac{\vec{E}_1 \Lambda \vec{B}_1}{\mu_0} = \dfrac{1}{c.\mu_0}.\vec{E}_1 \Lambda (\vec{u}_r' \Lambda \vec{E}_1) = \dfrac{E_1^2}{c.\mu_0}.\vec{u}_\alpha \Lambda (\vec{u}_r' \Lambda \vec{u}_\alpha) = \dfrac{E_1^2}{c.\mu_0}.\vec{u}_r'$

$$= \frac{\left[f_1(r',\alpha).\ddot{p}(t-r'/c)\right]^2}{c.\mu_0}\vec{u}_r' = \boxed{\varepsilon_0.c.\left[f_1(r',\alpha).\ddot{p}(t-r'/c)\right]^2 \vec{u}_r'}$$

II-1.2.5- Le théorème de l'énergie mécanique appliqué à l'électron donne :

$$\frac{dE_m}{dt} = P_{NC} = -P_r \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{-k}{2.r}\right) = -\frac{2}{3}\frac{e}{c^3}.\left(\frac{k}{m.r^2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad r^2.dr = -\frac{4}{3}\frac{1}{c^3}.\left(\frac{k}{m}\right)^2.dt$$

$$\Rightarrow \quad r^3 - r_0^3 = -\frac{4}{c^3}.\left(\frac{k}{m}\right)^2.(t-t_0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{(c.r_0)^3}{4}.\left(\frac{m}{k}\right)^2} \qquad \textbf{AN} \qquad \boxed{\tau = 1{,}56.10^{-11}s}$$

La durée est très courte, que le phénomène de crash atomique se produirait quasi instantanément.

II-1.3-

II-1.3.1- On a $L_O = \sqrt{m.k.r} = n.\hbar$ d'où $r_n = \dfrac{(n.\hbar)^2}{m.k} = \boxed{\dfrac{4.\pi.\varepsilon_0}{m}\left(\dfrac{n.\hbar}{e}\right)^2}$

II-1.3.2- Rayon de BOHR (de l'atome d'Hydrogène dans son état fondamentale n=**1**) :

$$r_1 = \frac{4.\pi.\varepsilon_0}{m}\left(\frac{\hbar}{e}\right)^2 = \frac{m}{k}\left(\frac{\hbar}{m}\right)^2 \approx \boxed{53{,}24 \ pm \approx 53{,}76 \ pm}$$

II-1.3.3- Module de la vitesse $v_n = \sqrt{\dfrac{k}{m.r}} = \dfrac{k}{n.\hbar} = \boxed{\dfrac{e^2}{n.4.\pi.\varepsilon_0.\hbar} = \dfrac{v_0}{n}}$

$$\boxed{v_0 = \frac{e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.\hbar} = \frac{k}{\hbar}} \quad ; \quad \boxed{v_0 = 2{,}19.10^6 m.s^{-1}}$$

Le mouvement de l'électron **n'est pas relativiste** car $\boxed{v_0 < 0{,}1.c}$

II-1.3.4- L'énergie mécanique de l'électron est :

$$E_m = \frac{-k}{2.r} = \frac{-m}{2}\left(\frac{k}{n.\hbar}\right)^2 = \frac{-m}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0.\hbar}\right)^2\frac{1}{n^2} = \boxed{\frac{E_0}{n^2}}$$

Où $\boxed{E_0 = \dfrac{-m}{2}\left(\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0.\hbar}\right)^2 = \dfrac{-m}{2}\left(\dfrac{k}{\hbar}\right)^2}$

II-1.3.5- Le passage de l'électron du niveau d'énergie p au niveau supérieur q > q nécessite une énergie égale à $\Delta E = h.\nu_{pq} \Rightarrow E_q - E_P = E_0.\left(\dfrac{1}{q^2} - \dfrac{1}{p^2}\right) = \dfrac{h.c}{\lambda_{pq}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda_{pq}} = \frac{-E_0}{h.c}.\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right) = \boxed{R_H.\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right)}$$

$$R_H = \frac{m}{2.h.c}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0.\hbar}\right)^2 = \boxed{\frac{m}{8.c.h^3}\left(\frac{e^2}{\varepsilon_0}\right)^2}$$

II-1.3.6- L'énergie d'ionisation de l'atome d'Hydrogène est :

$$\text{E.I.} = E_\infty - E_{n=1} = -E_0 = \frac{m}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0.\hbar}\right)^2 = \boxed{\mathbf{13{,}50}\ \text{eV}}$$

II-1.3.7- On a : $\frac{1}{\lambda_{q\to 2}} = \frac{1}{\lambda_0}.\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{q^2}\right) \Rightarrow \lambda_{q\to 2} = \frac{\lambda_0}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{q^2}\right)}$

$$\lambda_V < \lambda_{q\to 2} < \lambda_R \quad \textbf{ssi} \quad \lambda_V < \frac{\lambda_0}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{q^2}\right)} < \lambda_R \quad \textbf{ssi} \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda_0}{\lambda_R}\right)}} < q < \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda_0}{\lambda_V}\right)}}}$$

Comme λ_V =400nm, λ_R=800 nm et λ_0=91,2 nm

D'où : $2{,}71 < q < 6{,}74$ donc q = { **3 , 4 , 5 , 6** } .

q	3	4	5	6
λ (nm)	$\boxed{\lambda_1 = \mathbf{410{,}4}}$	λ_2 = 434,3	λ_3 = 486,4	$\boxed{\lambda_4 = \mathbf{656{,}6}}$
	410	**434**	**486**	**656**

II-1.3.8- Les longueurs d'onde des rayons X sont dans l'intervalle [*1* pm – *1000* pm]

Alors que les transitions atomiques de l'Hydrogène produisent des rais de longueur d'onde comprise entre (91 200 pm et 5000 000 pm) ≫ devant λ_X.

Ces transitions (de l'Hydrogène) **ne peuvent** donc pas produire des rayons X.

II-1.4-

II-1.4.1- Pour le cuivre (Z=29) , la couche la plus proche du noyau **est la couche K**

car son énergie est la plus basse, en effet : $E_n = E_0.\left(\frac{Z}{n}\right)^2$ et $r_n = r_0.\frac{n^2}{Z}$

Comme $E_K < E_L < E_M$ donc $n_K < n_L < n_M$ (car E_0 <0) donc $\boxed{r_K < r_L < r_M}$

L'électron de la couche K est plus lié au noyau que l'électron L que celui de M.

II-1.4.2- Dans le cas de l'atome de cuivre : $E_q - E_p = \frac{h.c}{\lambda_{pq}} \Rightarrow \lambda_{pq} = \frac{h.c}{E_q - E_p}$

$$\lambda_{L\to K} = \frac{h.c}{E_L - E_K} = \boxed{154{,}6\,pm} \qquad \lambda_{M\to K} = \frac{h.c}{E_M - E_K} = \boxed{139{,}7\,pm}$$

Ces raies sont bien dans le domaine X.

Extension : On peut utiliser la formule de RITZ généralisée

$$\frac{1}{\lambda_{pq}} = \frac{-E_0.Z^{*2}}{h.c}.\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right) \quad \text{Donc} \quad \lambda_{q\to K(p=1)} = \frac{\lambda_0}{Z^{*2}\left(1-1/q^2\right)}$$

reste à connaitre la charge fictive Z* (Notion hors programme dans le programme en cours : de **2013**)

III- Application : Utilisation des rayons X en imagerie médicale

III-1- $dN_a = S.dx.n^* = S.dx\dfrac{dN}{dV} = \quad S.dx\dfrac{dm.N_A}{M.dV} = \boxed{\dfrac{\rho.N_A.S.dx}{M}}$

III-2- **Modèle d'absorption :**

- Seuls quelques photons du faisceau sont absorbés par les atomes.
- La probabilité pour qu'un photon soit absorbée par un atome vaut $\dfrac{s_a}{S}$

$\Rightarrow$ le nombre de photons absorbé est $p = \dfrac{s_a}{S} = \dfrac{n_{absorbés}}{n_{incidents}} = \dfrac{dN_a}{N(x)}$

III-3- N(x) = N(x+dx) + dN_{ab} (pendant dt) = N(x+dx) + $\dfrac{\pi.r_a^2}{S}.N(x)$

$\Rightarrow$ dN = N(x+dx) - N(x) = - $dN_a.\dfrac{\pi.r_a^2}{S} = \dfrac{-\rho.N_A.dx}{M}.\dfrac{\pi.r_a^2}{S}.N(x)$

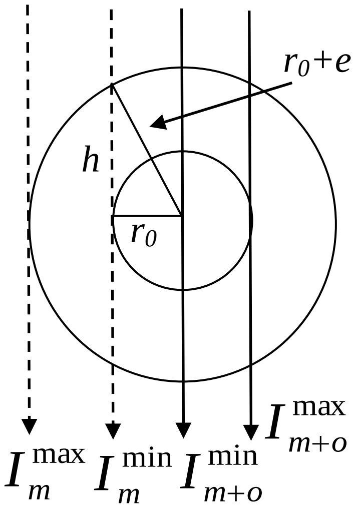
$\Rightarrow \boxed{\dfrac{dN(x)}{dx} + \dfrac{\rho.N_A}{M}.(\pi.r_a^2).N(x) = 0}$

III-4- L'équation différentielle : $\dfrac{dN(x)}{dx} + \dfrac{\rho.N_A}{M}.(\pi.r_a^2).N(x) = 0$ admet pour solution :

$\boxed{N(x) = N_0.e^{-\mu.x}}$ où $\mu = \dfrac{\pi.r_a^2.\rho.N_A}{M}$ (donnée par l'énoncé)

III-5-

III-5.1- Le coefficient μ représentant l'atténuation du faisceau X dans le matériau, ainsi plus il est grand plus forte est l'atténuation. L'**os absorbe plus** que le muscle. Ce fait explique pourquoi les muscles apparaissent sombres dans **les images latentes** radiographiques (à rayon X).



III-5.2- Le contraste est un paramètre qui **mesure la netteté** de la figure radiographique s'il est proche de l'unité l'image est de très bonne qualité. C varie de **0** à **1**

III-5.3- L'intensité de l'onde X en x est $I(x) = \dfrac{N(x).h.\nu}{S}$

D'où pour l'os (**os+muscle**) :

$I_{m+o}^{min} = I_0.\exp[-2.(\mu_m.e + \mu_o.r_0)]$ **et** $I_{m+o}^{max} = I_0.\exp\left(-\mu_m.2.\sqrt{e^2 + 2.e.r_0}\right)$

$$\boxed{C_o = \dfrac{\exp[-\mu_m.2.\sqrt{e^2+2.e.r_0}\,] - \exp[-2.(\mu_m.e+\mu_o.r_0)]}{\exp[-\mu_m.2.\sqrt{e^2+2.e.r_0}\,] + \exp[-2.(\mu_m.e+\mu_o.r_0)]}}$$

III-5.4- Pour le muscle : $I_m^{min} = I_0.\exp\left(-\mu_m.2.\sqrt{e^2+2.e.r_0}\right)$ et $I_m^{max} = I_0$.

Soit $\boxed{C_m = \dfrac{1-\exp\left(-\mu_m.2.\sqrt{e^2+2.e.r_0}\right)}{1+\exp\left(-\mu_m.2.\sqrt{e^2+2.e.r_0}\right)}}$

III-5.5- **AN** $\boxed{C_m = \textbf{0,112}}$ et C_o = **0,519** , le muscle fournit une image moins contrasté ; Ce qui explique la qualité des images des zones osseuses.

III-5.6- Dans les zones de fracture ou fêlure, le coefficient d'atténuation sera relativement faible et fluctue spatialement, ce qui **dégrade la qualité** de l'image radiographique.

IV-Application : Utilisation des rayons X en cristallographie

IV-1- Principe de HYUGENS –FRESNEL :

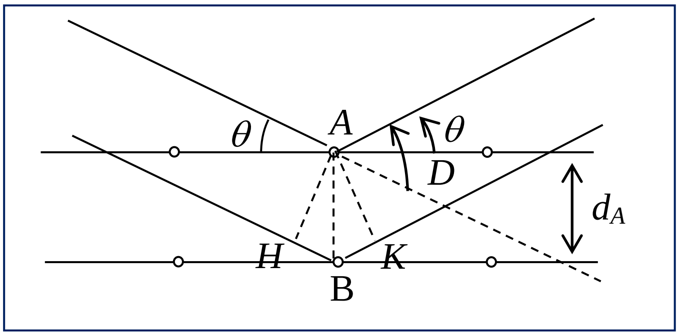
Contribution de Huygens (1678) : Christian.H.-math.phy.astro. Néerlandais
La lumière se propage de proche en proche, chaque élt de surface dS_P (de l'ouverture Σ) atteint par l'onde se comporte comme une source secondaire fictive synchrone à la source primaire, émettant vers l'avant des ondes sphériques d'amplitude proportionnelle à dS_p et l'amplitude de l'onde incidente.

Contribution de Fresnel (1818) : Augustin Jean Fresnel- phy. Français
Les sources secondaires sont cohérentes entres elles.

IV-2- D'après la figure en bas On a $D=\theta+\theta = \boxed{2\,\theta}$ (égalité d'angles opposés au sommet).

IV-3- Les surface d'onde d'un faisceau parallèle sont **des plans**, par application **du théorème de MALUS- DUPIN** : postulant que les surfaces d'onde sont orthogonales aux rayons lumineux (dans tout milieu isotrope).

IV-4- **Schéma** (ci- contre)



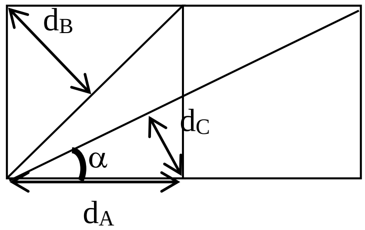
La ***ddm*** entre les deux rayons se diffractant sur deux files d'atomes voisines :

$$\delta_A(M) = (SM)_2 - (SM)_2$$
$$= 2.n_a.HB = \boxed{2\,.\,d_A\,.\,\sin\theta}$$

IV-5- Les maximas d'intensité énergétique sont obtenue dans la condition d'interférences constructives, càd dans le cas où :

$$\delta_A(M) = n.\lambda \iff \boxed{2\,.\,d_A\,.\,\sin\theta_{max,A} = n.\lambda \quad \text{pour } \mathbf{n} \in \mathbb{Z}}$$

IV-6-



IV-6.1- Les distances interplanaires sont :

$$\boxed{d_A = a} \;;\; \boxed{d_B = \frac{a\sqrt{2}}{2}} \;;$$

$$\boxed{d_C = a.\sin\alpha = a.\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = a.\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{a}{\sqrt{5}}}$$

IV-6.2- $r_1 = \frac{\sin(\theta_{max,B})}{\sin(\theta_{max,A})} = \frac{d_A}{d_B} = \sqrt{2}$ et $r_2 = \frac{\sin(\theta_{max,C})}{\sin(\theta_{max,A})} = \frac{d_A}{d_C} = \sqrt{5}$, diffraction à l'ordre car **n=1**.

IV-6.3- Comme d est inversement proportionnel à $\sin(\theta_{max})$, il varie alors en sens inverse de θ_{max} (car la fonction sin est croissante dans l'intervalle $[0, \pi/2]$)

d'où : $\boxed{\theta_1 \rightarrow A \;;\; \theta_2 \rightarrow B \text{ et } \theta_3 \rightarrow C}$

$$a(1) = \frac{\lambda}{2\sin(\theta_{max,A})} = 410{,}926\,pm \;;\; a(2) = \frac{\lambda.\sqrt{2}}{2\sin(\theta_{max,B})} = 411{,}36\,pm \text{ et}$$

$$a(3) = \frac{\lambda.\sqrt{5}}{2\sin(\theta_{max,C})} = 411{,}26\,pm$$

$\boxed{\text{D'où } a = a\,(moyen) = \mathbf{411}\text{ pm}}$